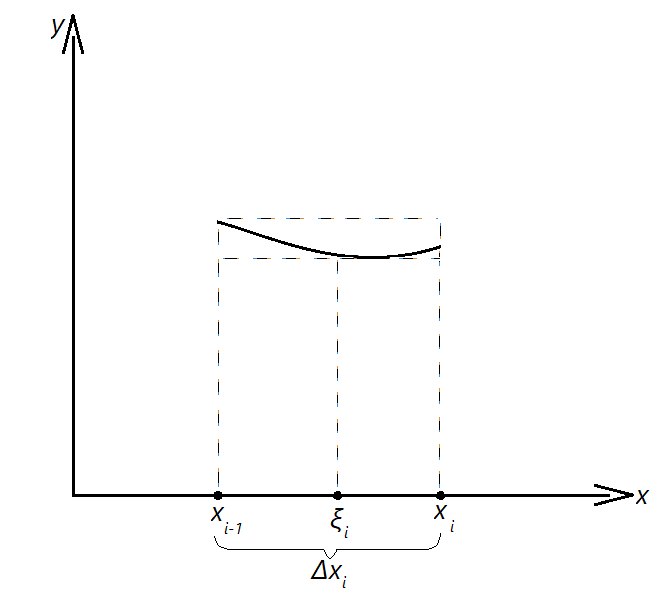
**Вопросы к экзамену по математическому анализу для первого курса второго семестра ФКТИ в 2023/2024 учебном году.**

**Определенный интеграл**

1. ***Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Теорема существования (без доказательства). Основные свойства определенного интеграла, выраженные равенствами (5 свойств с доказательством: о независимости от обозначения переменной интегрирования, два свойства линейности, о перестановке пределов, о разбиении интервала интегрирования).***

*Для вычисления S криволинейной трапеции трапеции, разделим основание на n частей:*

|  |
| --- |
|  |

** –** произвольная точка ∈ []

Δ = -

≈ ƒ (

S = ≈ Δ )

1. Увеличивая число элементарных участков n --> ∞
2. Уменьшая длину каждого из них

Δ --> 0

S =

|  |
| --- |
| **Определение:**  Сумма - произведение элементов участков Δ на значения функции выделенных участков ƒ ( **–** называется интегральной суммой для ƒ(x) на [a, b]:  Δ ) |

|  |
| --- |
| **Определенный интеграл как предел интегральной суммы:** |

**Теорема существования (без доказательства):**

* Если – непрерывна на [a, b] Ǝ
* Если – ограничена на [a, b]
* Имеет конечное число точек разрыва Ǝ

**Основные свойства определенного интеграла, выраженные равенствами (5 свойств с доказательством: о независимости от обозначения переменной интегрирования, два свойства линейности, о перестановке пределов, о разбиении интервала интегрирования)**

1. Определённый интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования:

= =

1. **Свойство о вынесении постоянного множителя:**

= c \*

1. **Интеграл**

= + … +

1. **При перестановке верхнего и нижнего пределов, интеграл меняет знак:**

= -

**Док-во:**

*Изменит знак*

**Следствие:**

=

1. **О разбиении интервала интегрирования (аддетивность):**

= +

– Любые

**Док-во:**

1. a < b < c



*Т.к предел интегрирования участки, то будем разбивать его так, чтобы b была точкой деления:*

+

1. a < c < b



*Из 1- го пункта следует:* = +

= -

Или = +

1. **Теоремы о знаке определенного интеграла, об интегрировании неравенств (включая следствие о модуле интеграла) и об оценке определенного интеграла; все теоремы и следствие с доказательством.**

* ***Теорема о знаке определённого интеграла:***

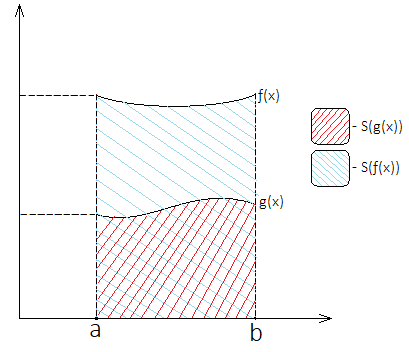
1  ⩾ 0

2 a < b ⩾ 0

**Док- во**: *> 0 из пункта 2*

*⩾ 0 из 1 пункта*

* ***Теорема об интегрировании неравенств:***



1 ƒ(x) ⩾ g(x) на [a, b]

2 a < b ⩾

( S( ⩾ S( )

* ***Свойство о модуле интеграла:***

|| ⩽

a < b

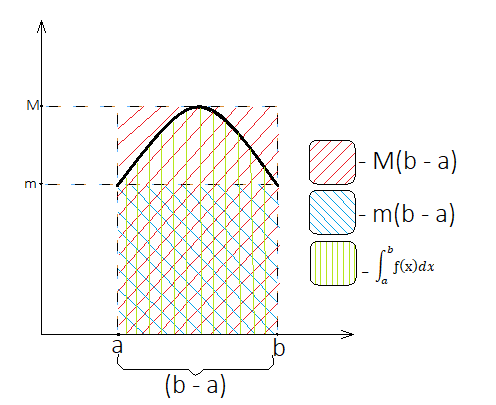
Док- во: - ⩽ ⩽

-∫ ⩽ ∫ ⩽ ∫

|∫| ⩽ ∫ dx

* ***Свойство об оценке определенного интеграла:***

**Дано:**

1. m ⩽ ⩽ M 
2. a < b

**Тр. док- ть:**

m(b – a) ⩽ ⩽ M(b – a)

(S \\\) (S |||) (S///)

**Док- во:** m ⩽ ⩽ M

⩽ ⩽

1. ***Теорема о среднем значении определенного интеграла (с доказательством), ее геометрический смысл.***

Теорема о среднем значении определённого интеграла:

* *Определенный интеграл от непрерывной функции равен произведению значения этой функции в некоторой точке интервала интегрирования на разность верхнего и нижнего пределов этой функции.*

**Док-во:**

1. a < b: – непрерывна на [a, b] m ⩽ ⩽ M

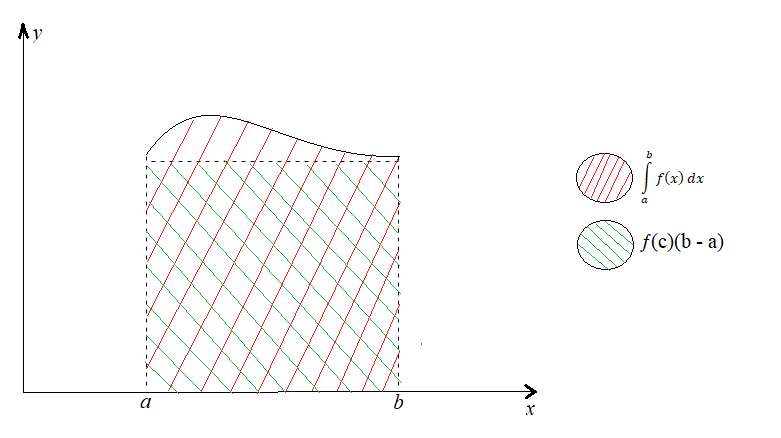
m(b – a) ⩽ ⩽ M(b – a)

m ⩽ ⩽ M

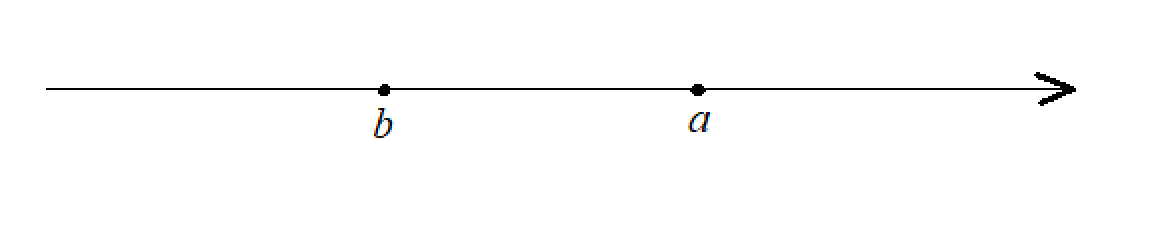
p

– непрерывна на [a, b] = p

= (b – a)

*Если  ⩾ 0, то всегда найдётся прямоугольник, равновеликий данной криволинейной трапеции и имеющий с ним общее основание.*

1. a > b



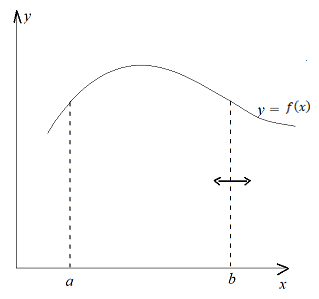
**Из пункта 1:** a b

b a

= (a – b)

= (b – a)

1. ***Теорема (Барроу) о производной определенного интеграла по верхнему пределу (с доказательством).***

*Производная определённого интеграла по верхнему пределу:  
*

*b = var b x*

*? x b*

=

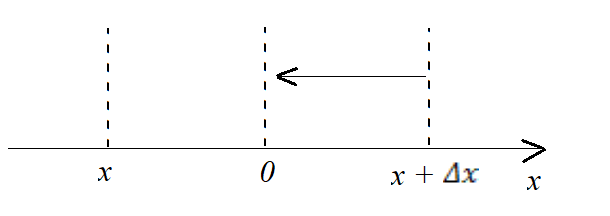
Производная определённого интеграла от непрерывной функции по верхнему пределу равна значению этой функции при верхнем пределе.

**Дано:** 1. – непрерывна на [a, b], t

2.

**Док- во:**

=

 с [x, x + ]

0 с x

**Следствие:**

Всякая непрерывная на [a, b] функция имеет на нём первообразную непрерывную на [a, b] =

т.е – первообразная

*где =*

1. ***Теорема о связи определенного и неопределенного интегралов (с доказательством). Формула Ньютона–Лейбница.***

*Определённый интеграл от непрерывной функции равен разности значений любой её первообразной, вычисленной при верхнем и нижнем пределе интегрирования.*

**Док- во:**

*=*

*= ,* т.е– первообразная

*(V)*

1. *F(a) = 0* + c *C = F(a)*

**Из (V):** *F(x) = + F(a)*  *(VV)*

1. **В (VV):** *x = b*

*F(b) =*

*F(b) – F(a) = F(x)* знак двойной подстановки